

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Semestre 03/04

26 de Janeiro de 2004, 9.00

Duração: 2 horas

I (2,5 val.)

1. Seja A o subconjunto de \mathbb{R} definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 3| \leq 1 \text{ e } x > 0\} .$$

Mostre que $A = [1, \sqrt{2}]$ e determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}$.

2. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões

$$\frac{2^{2n} + n^3}{n^5 + 4^{n+1}} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} .$$

II (2,5 val.)

1. Determine a natureza das séries numéricas:

$$\sum \frac{n-1}{\sqrt{n^3+1}} \quad \text{e} \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} .$$

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n(n+2)}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente. Calcule a sua soma quando $x = 0$.

III (3,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & , x > 0 \\ \frac{x^2}{1-x} & , x \leq 0 . \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é diferenciável em \mathbb{R} e calcule a sua derivada.
- (b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- (c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(1/x))^{x^2} .$$

IV (1,5 val.)

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja p_n o polinómio de grau $(n - 1)$ definido por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} .$$

Mostre que

$$(p_{n+1})' = p_n \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - p_n(x)}{x^n} = \frac{1}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada, e tal que $g(0) = 0$. Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Mostre que h é uma função limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e prolongável por continuidade ao ponto zero.