

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Semestre 2003/04

Exame Tipo

Duração: 2 horas

I (2,0 val.)

1. Seja A o subconjunto de \mathbb{R} definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x(x - 2)| \leq 1 \text{ e } x \geq 0\} .$$

Mostre que $A = [0, 1 + \sqrt{2}]$ e determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}$ e $A \setminus \mathbb{Q}$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1 + x_n^2} .$$

Mostre que $0 < x_n < 1$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

II (3,0 val.)

1. Determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) das seguintes séries numéricas:

$$\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ e } \sum \frac{(2n)!}{n^{2n}} .$$

2. Seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} (3x-2)^n$$

no conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 1$. [Sugestão: a série numérica obtida neste ponto é uma série de Mengoli.]

III (3,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ x^2 e^x & , x < 0 . \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.
 - (b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
 - (c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x)^{x-1}$.

IV (1,5 val.)

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja p_n o polinómio de grau $2n - 1$ definido por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - p_n(x)}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- (a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) - f(x)] = 0$.
 - (b) Será que se pode garantir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.