

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2004/05 10/JAN/2005, 9.00 - V.2 DURAÇÃO: 2H

I (2,5 val.)

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \arctan |2x^2 - 3| \leq \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^+$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que (x_n) é estritamente decrescente.

(b) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

II (2,5 val.)

1. Calcule

$$\lim \left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right)^{n^2+1}.$$

2. Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3}{3^n}.$$

3. Determine a natureza da seguinte série numérica:

$$\sum \frac{3^n n^4}{n!}.$$

4. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+5}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (2,0 val.)

Considere a função $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1), \quad \forall x > 1.$$

- Determine os intervalos de monotonia e extremos de f .
- Determine as concavidades e inflexões de f .
- Determine as assíntotas ao gráfico de f .
- Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

IV (3,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin(x)}{x^2}, & \text{se } x < 0; \\ \tan\left(\frac{x}{6+x^2}\right), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/6$.
- Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em \mathbb{R} .

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^x.$$

3. Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos, i.e. $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e (b_n) a sucessão definida por

$$b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

$$\sum_n a_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ convergente}.$$