Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2004/05 10/JAN/2005, 9.00 - V.1 DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \arctan|3 - x^2| \le \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^+$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $x_n > 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e que (x_n) é estritamente decrescente.

(b) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

3. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as seguintes sucessões:

$$n - \sqrt{n(n-1)}\,, \qquad \left(1 - \frac{n}{n+3}\right)^{2/n} \qquad \text{e} \qquad \left(1 - \frac{\pi}{n^2+1}\right)^{n^2}\,.$$

II (5,0 val.)

1. Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3}{3^n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}\,.$$

2. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}\,, \qquad \sum \frac{2^n n^5}{n!} \qquad \text{e} \qquad \sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

3. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n+4}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (5,0 val.)

1. Considere a função $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1)\,,\ \forall\, x > 1\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} x \cdot \arcsin(1/x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x\ .$$

IV (5,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}\,, & \text{se } x < 0; \\[2ex] -\tan\left(\dfrac{x}{6+x^2}\right)\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

(c) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

2. Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos , i.e. $a_n > 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e (b_n) a sucessão definida por

$$b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n^2}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Mostre que

$$\sum_n a_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ convergente}\ .$$

3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ g(x) = x\}$. Prove que as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) se $A = \emptyset$ e $g(0) = 1$ então $g(x) > x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

(b) se $\mathbb{Q} \subset A$ então $A = \mathbb{R}$.