

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2004/05 10/JAN/2005, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \arctan |2x^2 - 3| \leq \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^+$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que (x_n) é estritamente decrescente.

(b) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

3. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as seguintes sucessões:

$$\sqrt{n(n+1)} - n, \quad \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^{2/n} \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{\pi}{n^2+3}\right)^{n^2}.$$

II (5,0 val.)

1. Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3}{3^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

2. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\sum \frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}}, \quad \sum \frac{3^n n^4}{n!} \quad \text{e} \quad \sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+5}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (5,0 val.)

1. Considere a função $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1), \quad \forall x > 1.$$

- Determine os intervalos de monotonia e extremos de f .
- Determine as concavidades e inflexões de f .
- Determine as assíntotas ao gráfico de f .
- Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \arcsin(1/x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^x.$$

IV (5,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin(x)}{x^2}, & \text{se } x < 0; \\ \tan\left(\frac{x}{6 + x^2}\right), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/6$.
- Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.
- Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em \mathbb{R} .

2. Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos, i.e. $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e (b_n) a sucessão definida por

$$b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

$$\sum_n a_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ convergente}.$$

3. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$. Prove que as seguintes afirmações são verdadeiras:

- se $A = \emptyset$ e $g(1) = 0$ então $g(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$;
- se $\mathbb{Q} \subset A$ então $A = \mathbb{R}$.