Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2004/05 24/JAN/2005, 9.00 - V.1 DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2}{2+x} \geq 1 \right\}$.

(a) Mostre que $A =]-2,-1] \cup [2,+\infty[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap]-\infty, 2]$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2-x_n}}\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $0 \leq x_n < 1\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e que (x_n) é estritamente crescente.

(b) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

3. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as seguintes sucessões:

$$\frac{2^{2n} - n^3}{n^5 + 4^{n+1}}\,, \qquad \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{1/n} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}\right)^{n+1}\,.$$

II (5,0 val.)

1. Calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan(n) - \arctan(n+1)\right)\,.$$

2. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\sum \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+4}\,, \qquad \sum \frac{2^n + n^5}{n!} \qquad \text{e} \qquad \sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

3. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n+3}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (5,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x}\,, \ \forall\, x \neq 0\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(2 + x^3\right)^{1/\log(x)} \ .$$

IV (5,0 val.)

1. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x}\,, & \text{se } x < 0; \\ \\ \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que g é diferenciável no ponto zero com $g'(0) = 1/2$.

(b) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $h(1) = 0$ e $h'(1) = 2$. Determine $(g \circ h)'(1)$.

2. Seja $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = -2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1) = 2n-1\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(c) Mostre que existem sucessões (a_n) e (b_n), ambas com limite $+\infty$, tais que

$$\lim \phi'(a_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim \phi'(b_n) = -\infty\,.$$

3. Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus Axiomas de Corpo (i.e. comutatividade e associatividade de $+$ e $\cdot$, distributividade, existência de elementos neutros, simétricos e inversos), e o facto de 0 ser Elemento Absorvente para a multiplicação, mostre que:

(a) $(-1) \cdot a = -a$;

(b) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.