

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2004/05 24/JAN/2005, 9.00 - V.2 DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{2-x} \geq 1 \right\}$.

(a) Mostre que $A =]-\infty, -2] \cup [1, 2[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap [-2, +\infty[$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2-x_n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que $0 \leq x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que (x_n) é estritamente crescente.

(b) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

3. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as seguintes sucessões:

$$\frac{4^{n+1} - n^5}{n^3 + 2^{2n}}, \quad \left(\frac{n^2}{n+2} \right)^{1/n} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \right)^{n+2}.$$

II (5,0 val.)

1. Calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n+1)).$$

2. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+5}, \quad \sum \frac{3^n + n^4}{n!} \quad \text{e} \quad \sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n+2}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (5,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

- Determine os intervalos de monotonia e extremos de f .
- Determine as concavidades e inflexões de f .
- Determine as assíntotas ao gráfico de f .
- Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + x^2)^{1/\log(x)}.$$

IV (5,0 val.)

1. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{x-1}\right), & \text{se } x \leq 0; \\ \frac{e^x - 1 - x}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Mostre que g é diferenciável no ponto zero com $g'(0) = 1/2$.
- Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $h(2) = 0$ e $h'(2) = 1$. Determine $(g \circ h)'(2)$.

2. Seja $\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = 2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1) = 1 - 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em \mathbb{R}^+ .
- Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em \mathbb{R}^+ .
- Mostre que existem sucessões (a_n) e (b_n) , ambas com limite $+\infty$, tais que

$$\lim \phi'(a_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim \phi'(b_n) = -\infty.$$

3. Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus Axiomas de Corpo (i.e. comutatividade e associatividade de $+$ e \cdot , distributividade, existência de elementos neutros, simétricos e inversos), e o facto de 0 ser Elemento Absorvente para a multiplicação, mostre que:

- $(-1) \cdot a = -a$;
- $-(a + b) = (-a) + (-b)$.