Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

$1^{\underline{o}}$ SEM. 2005/06 09/JAN/2006, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

I (2,5 val.)

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| < 1/2 \quad \text{e} \quad x(2x - \pi) \leq 0\}$.

(a) Mostre que $A = [0, \pi/6[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A e de $A \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Calcule:

(a)

$$\lim \left(\frac{\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} - 1}\right)^{\sqrt{n}}$$

(b)

$$\lim \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3 \cdot 2^n}$$

II (2,5 val.)

1. Determine a natureza das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4}{5^{n+1}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)}{(2n)!}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!}$$

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x + 2)^n}{\sqrt{2n + 3}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (2,0 val.)

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\arctan(x) - x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

IV (3,0 val.)

1.

(a) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right] = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\ ,\ \forall\, 2\le n\in\mathbb{N}\,.$$

(b) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$$

é convergente e calcule a sua soma.

(c) A série da alínea (b) é absolutamente convergente? Justifique.

2. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+}\,(1-\cos(x))^{1/\log(x)}\ .$$

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que existe uma sucessão (x_n) tal que: (i) $x_n\to 0$; (ii) $x_n\neq 0$ e $f(x_n)=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

(a) Mostre que $f(0)=f'(0)=0$.

(b) Prove que a equação $f'(x)=0$ tem infinitas soluções distintas.