

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2005/06 09/JAN/2006, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

I (2,5 val.)

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| < 1/2 \text{ e } x(2x + \pi) \leq 0\}$.

(a) Mostre que $A =]-\pi/6, 0]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A e de $A \cap \{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Calcule:

(a)

$$\lim \left(\frac{\sqrt{n} + 3}{\sqrt{n} + 1} \right)^{\sqrt{n}}$$

(b)

$$\lim \frac{2^{2n} + 3^{n+1}}{3 \cdot 2^n - 4^n}$$

II (2,5 val.)

1. Determine a natureza das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 + 3^n}{5^{n+1}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)}{(2n)!}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!}$$

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x + 3)^n}{\sqrt{3n + 2}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (2,0 val.)

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - 2 \arctan(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f .
- (b) Determine as concavidades e inflexões de f .
- (c) Determine as assíntotas ao gráfico de f .
- (d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

IV (3,0 val.)**1.**

- (a) Mostre que

$$\sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \forall 2 \leq n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right]$$

é convergente e calcule a sua soma.

- (c) A série da alínea (b) é absolutamente convergente? Justifique.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos(x))^{1/\log(x)}.$$

- 3.** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que existe uma sucessão (x_n) tal que: (i) $x_n \rightarrow 0$; (ii) $x_n \neq 0$ e $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a) Mostre que $f(0) = f'(0) = 0$.
- (b) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem infinitas soluções distintas.