Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# 1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

**1º SEM. 2005/06 09/JAN/2006, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 3H**

**I** (5,0 val.)

**1.** Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| < 1/2 \quad \text{e} \quad x(2x - \pi) \leq 0\}$.

(a) Mostre que $A = [0, \pi/6[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A$ e de $A \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

**2.** Considere a sucessão $(x_n)$ definida por

$$x_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 3} - 1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $0 \leq x_n < 1$ , $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e que $(x_n)$ é estritamente crescente.

(b) Justifique que $(x_n)$ é convergente e calcule o seu limite.

**3.** Calcule:

$$\lim \left(\frac{\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} - 1}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad \lim \left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\right)^{1/n} \qquad \text{e} \qquad \lim \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3 \cdot 2^n}\,.$$

**II** (5,0 val.)

**1.** Determine a natureza das seguintes cinco séries numéricas e calcule a soma de duas delas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4}{5^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)}{(2n)!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!}$$

**2.** Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x + 2)^n}{\sqrt{2n + 3}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

**III** (5,0 val.)

**1.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\arctan(x) - x\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de $f$.

(b) Determine as concavidades e inflexões de $f$.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de $f$.

(d) Esboce o gráfico de $f$ e indique o seu contradomínio.

**2.** Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(1/x)e^x \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} (1-\cos(x))^{1/\log(x)}\ .$$

**IV** (5,0 val.)

**1.**

(a) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)\right] = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\,,\ \forall\, 2 \le n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)\right]$$

é convergente e calcule a sua soma.

(c) A série da alínea (b) é absolutamente convergente? Justifique.

**2.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2\log(x)\,, & \text{se } x > 0; \\ \\ e^{1/x}\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(0) = 0$.

(b) Mostre que $f$ é diferenciável no ponto zero.

**3.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que existe uma sucessão $(x_n)$ tal que: (i) $x_n \to 0$; (ii) $x_n \neq 0$ e $f(x_n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $f(0) = f'(0) = 0$.

(b) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem infinitas soluções distintas.