

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I  
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2005/06      09/JAN/2006, 9.00 - V. 2      DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Considere o conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| < 1/2 \text{ e } x(2x + \pi) \leq 0\}$ .

(a) Mostre que  $A = ]-\pi/6, 0]$ .

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de  $A$  e de  $A \cap \{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$ .

2. Considere a sucessão  $(x_n)$  definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 3} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que  $1 < x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ , e que  $(x_n)$  é estritamente decrescente.

(b) Justifique que  $(x_n)$  é convergente e calcule o seu limite.

3. Calcule:

$$\lim \left( \frac{\sqrt{n} + 3}{\sqrt{n} + 1} \right)^{\sqrt{n}}, \quad \lim \left( \frac{n^2 + 1}{n - 1} \right)^{1/n} \quad \text{e} \quad \lim \frac{2^{2n} + 3^{n+1}}{3 \cdot 2^n - 4^n}.$$

II (5,0 val.)

1. Determine a natureza das seguintes cinco séries numéricas e calcule a soma de duas delas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 + 3^n}{5^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)}{(2n)!},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!}$$

2. Determine o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x + 3)^n}{\sqrt{3n + 2}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

**III** (5,0 val.)

1. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x - 2 \arctan(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .  
 (b) Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .  
 (c) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .  
 (d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/x)e^x \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos(x))^{1/\log(x)}.$$

**IV** (5,0 val.)

1.

(a) Mostre que

$$\sum_{k=1}^n \left[ (-1)^{k-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \frac{1}{2} + (-1)^n \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \forall 2 \leq n \in \mathbb{N}.$$

(b) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^{k-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right]$$

é convergente e calcule a sua soma.

(c) A série da alínea (b) é absolutamente convergente? Justifique.

2. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{se } x < 0; \\ x^2 \log(x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que  $f(0) = 0$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero.

3. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Suponha que existe uma sucessão  $(x_n)$  tal que: (i)  $x_n \rightarrow 0$ ; (ii)  $x_n \neq 0$  e  $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Mostre que  $f(0) = f'(0) = 0$ .  
 (b) Prove que a equação  $f'(x) = 0$  tem infinitas soluções distintas.