Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2005/06 23/JAN/2006, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

I (2,5 val.)

1. Seja $D \subset \mathbb{R}$ o domínio da função $\log(x^2 - 2x)$ e considere o conjunto $A = \{x \in D : \log(x^2 - 2x) \leq 0\}$.

(a) Mostre que $A = \left[1 - \sqrt{2}, 0\right[\cup \left]2, 1 + \sqrt{2}\right]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A, $A \cap \mathbb{R}^-$ e $A \cap \mathbb{Q}^-$.

2. Calcule:

(a)
$$\lim \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\right) \sqrt{n+1}$$

(b)
$$\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$$

II (2,5 val.)

1. Determine a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n}{n^2+1}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 9}{3^{2n}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{n^n}$$

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n+1}$$
é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (2,0 val.)

Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x-2}}{x-1}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

IV (3,0 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = x_n^2\,(2 - x_n)\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $0 < x_n \leq 1/2\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é estritamente decrescente.
Sugestão: use a alínea (a) para mostrar que $0 < x_n(2 - x_n) < 1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

2. Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x}\ .$$

3.

(a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x, x+1]$.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com assímptota à direita de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe, então é igual a m.