

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2005/06 23/JAN/2006, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Seja $D \subset \mathbb{R}$ o domínio da função $\log(x^2 + 2x)$ e considere o conjunto $A = \{x \in D : \log(x^2 + 2x) \leq 0\}$.
- (a) Mostre que $A = [-1 - \sqrt{2}, -2[\cup]0, -1 + \sqrt{2}]$.
- (b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A , $A \cap \mathbb{R}^+$ e $A \cap \mathbb{Q}^+$.
2. Calcule:

$$\lim \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) \sqrt{n+3}, \quad \lim \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2} \quad \text{e} \quad \lim \left(\frac{1 + 5^n}{2 + 3^{n+1}} \right)^{1/n}.$$

3.

- (a) Use indução para mostrar que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Justifique que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

é convergente e calcule a sua soma.

II (5,0 val.)

1. Determine a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes cinco séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 2}{(n+2)!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 4}{2^{2n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2^n + 1}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

III (5,0 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} .$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f .
- (b) Determine as concavidades e inflexões de f .
- (c) Determine as assíntotas ao gráfico de f .
- (d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/x) \log(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x) \right)^{1/x} .$$

IV (5,0 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n^2 (2 - x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

- (a) Mostre que $0 < x_n \leq 1/2, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Mostre que (x_n) é estritamente decrescente.
Sugestão: use a alínea (a) para mostrar que $0 < x_n(2 - x_n) < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^2}, \quad \forall x \neq 0 .$$

- (a) Mostre que $f(0) = 0$ e que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/6$.
- (b) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 0$ e $g'(2) = 3$. Calcule $(f \circ g)'(2)$.

3.

- (a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x, x + 1]$.
- (b) Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com assíntota à direita de equação $y = mx + p, m, p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ existe, então é igual a m .