

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I  
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2005/06      23/JAN/2006, 9.00 - V. 2      DURAÇÃO: 3H

I (5,0 val.)

1. Seja  $D \subset \mathbb{R}$  o domínio da função  $\log(x^2 - 2x)$  e considere o conjunto  $A = \{x \in D : \log(x^2 - 2x) \leq 0\}$ .
- (a) Mostre que  $A = [1 - \sqrt{2}, 0[ \cup ]2, 1 + \sqrt{2}]$ .
- (b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de  $A$ ,  $A \cap \mathbb{R}^-$  e  $A \cap \mathbb{Q}^-$ .
2. Calcule:

$$\lim \left( \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} \right) \sqrt{n+1}, \quad \lim \left( \frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^{n^2} \quad \text{e} \quad \lim \left( \frac{3+2^{n+1}}{1+5^n} \right)^{1/n}.$$

3.

- (a) Use indução para mostrar que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Justifique que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

é convergente e calcule a sua soma.

II (5,0 val.)

1. Determine a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes cinco séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 2}{(n+2)!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 9}{3^{2n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

2. Determine o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n + 1}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

**III** (5,0 val.)

1. Considere a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{e^{x-2}}{x-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} .$$

- Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .
- Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .
- Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
- Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/x) \log(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)^{1/x} .$$

**IV** (5,0 val.)

1. Considere a sucessão  $(x_n)$  definida por

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n^2 (2 - x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

- Mostre que  $0 < x_n \leq 1/2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Mostre que  $(x_n)$  é estritamente decrescente.  
Sugestão: use a alínea (a) para mostrar que  $0 < x_n(2 - x_n) < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Justifique que  $(x_n)$  é convergente e calcule o seu limite.

2. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^2}, \quad \forall x \neq 0 .$$

- Mostre que  $f(0) = 0$  e que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1/6$ .
- Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $g(3) = 0$  e  $g'(3) = 2$ . Calcule  $(f \circ g)'(3)$ .

**3.**

- Seja  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$ . Mostre que se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$  existe, então é igual a zero.  
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma  $[x, x + 1]$ .
- Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com assíntota à direita de equação  $y = mx + p$ ,  $m, p \in \mathbb{R}$ . Mostre que se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  existe, então é igual a  $m$ .