Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 28/Out/2002 – LERCI Turma 01 Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

$$\text{(a)}\ \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \text{(b)}\ \frac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}} \qquad \text{(c)}\ \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-3| > 2 \ \wedge \ x \geq 0\} \ .$$

(a) Mostre que $S = [0,1[\cup]5,+\infty[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão crescente e convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \notin S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3+x_n^2}{2}} \ .$$

(a) Mostre que (x_n) é estritamente crescente e que

$$x_n < 2 \, , \ \forall n \geq 1 \, .$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus cinco Axiomas de Corpo (i.e. comutatividade e associatividade de $+$ e $\cdot$, distributividade, existência de elementos neutros, simétricos e inversos), mostre que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$, existe um e um só $z \in \mathbb{R}$ tal que $x = y \cdot z$.