

## 1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

1º TESTE – 28/Out/2002 – LESIM Turma 01

Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em  $\overline{\mathbb{R}}$  as sucessões seguintes:

(a)  $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$       (b)  $\frac{2^n + (n+1)!}{3^n + n!}$       (c)  $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n^2}$

2 (5 val.) Considere o conjunto  $S \subset \mathbb{R}$  definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x - 2|\} .$$

- (a) Mostre que  $S = ]-\infty, 1]$ .
- (b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de  $S$ .
- (c) Dê um exemplo de uma sucessão convergente,  $u_n \rightarrow a$ , com  $u_n \notin S$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e  $a \in S$ .

3 (4 val.) Considere a sucessão  $(x_n)$  definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} .$$

(a) Mostre que  $(x_n)$  é estritamente crescente e que

$$x_n < 3, \quad \forall n \geq 1 .$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que  $(x_n)$  é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus Axiomas de Corpo (i.e. comutatividade e associatividade de  $+$  e  $\cdot$ , distributividade, existência de elementos neutros, simétricos e inversos) e Ordem (i.e.  $\mathbb{R}^+$  é fechado para as operações  $+$  e  $\cdot$ , e tricotomia), mostre que se  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , com  $x < y$  e  $z > 0$ , então  $x \cdot z < y \cdot z$ .