Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 28/Out/2002 – LESIM Turma 01 Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$ (b) $\dfrac{2^n+(n+1)!}{3^n+n!}$ (c) $\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n^2}$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \leq |x-2|\} \ .$$

(a) Mostre que $S =]-\infty, 1]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, $u_n \to a$, com $u_n \notin S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \ .$$

(a) Mostre que (x_n) é estritamente crescente e que

$$x_n < 3 \, , \ \forall n \geq 1 \, .$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus Axiomas de Corpo (i.e. comutatividade e associatividade de $+$ e $\cdot$, distributividade, existência de elementos neutros, simétricos e inversos) e Ordem (i.e. $\mathbb{R}^+$ é fechado para as operações $+$ e $\cdot$, e tricotomia), mostre que se $x, y, z \in \mathbb{R}$, com $x < y$ e $z > 0$, então $x \cdot z < y \cdot z$.