Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

1º TESTE – 29/Out/2002 – LEGI   Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3}$ (b) $\dfrac{2^{2n}+6n}{3^n+4^{n+2}}$ (c) $\left(\dfrac{2n-1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x}{x-2} \leq 0 \right\} .$$

(a) Mostre que $S = [0, 2[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \notin S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^2}{4} .$$

(a) Mostre que

$$0 \leq x_n \leq 1 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{(x_n - x_{n+1})(x_n + x_{n+1})}{4} , \ \forall n \geq 1 .$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que

$$a \leq b\,, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \leq \inf B$.