Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 30/Out/2002 – LERCI Turma 02 Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{2n+3}{3n+(-1)^n}$ (b) $\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}$ (c) $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1}$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 1 > 0 \ \wedge\ x - 3 \leq 0\right\}.$$

(a) Mostre que $S =]-\infty, -1[\cup]1, 3]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão crescente e convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \notin S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}\,.$$

(a) Mostre que (x_n) é estritamente decrescente e que

$$x_n > 2\,,\ \forall n \geq 1\,.$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que

$$\inf A < \sup B\,.$$

Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ com $a < b$.