Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 30/Out/2002 – LESIM Turma 02 Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $n - \dfrac{n^2}{n+2}$ (b) $n(\sqrt{n^2+1} - n)$ (c) $\left(\dfrac{2n}{n+1} - 1\right)^n$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{x}{x+2} < 0 \right\} .$$

(a) Mostre que $S =]-2, 0[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão crescente e convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \notin S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} .$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 1 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n + 1} , \ \forall n \geq 1 .$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Mostre que se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, tais que

$$u_n \leq v_n , \ \forall n \in \mathbb{N} ,$$

então $\lim u_n \leq \lim v_n$.