Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 31/Out/2002 – LESIM Turma 03 Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{(-1)^n n}{1+n^2}$ (b) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+3}$ (c) $\left(\dfrac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-4| \leq |x|\} \ .$$

(a) Mostre que $S = \ [2, +\infty[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, $u_n \to a$, com $u_n \notin S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in S$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \ .$$

(a) Mostre que (x_n) é estritamente crescente e que

$$x_n < 3 \, , \ \forall n \geq 1 \, .$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Dê um exemplo de uma sucessão convergente (u_n), tal que a sucessão $v_n = n \cdot u_n$ possui dois sublimites distintos.