Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# $1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
## CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 31/Out/2002 – LERCI Turma 03 Duração: 50mn

**1** (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$ (b) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{n+1}$ (c) $\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

**2** (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge \ x+1>0\right\}.$$

(a) Mostre que $S = ]-1,2]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $S$.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, $u_n \to a$, com $u_n \notin S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in S$.

**3** (4 val.) Considere a sucessão $(x_n)$ definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n+2}.$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 0 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{(x_{n+1}+2)(x_n+2)}, \ \forall n \geq 1.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que $(x_n)$ é convergente, e calcule o seu limite.

**4** (3 val.) Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão $(y_n)$ de termos em $Y$ convergente para $y$.