Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 2/Dez/2002 – LERCI Turma 01 Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{n!}\ , \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\ ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (8 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2+1} & , x < 0\ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\ .$$

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.