Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

2º TESTE – 2/Dez/2002 – LESIM Turma 01 Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^3+1}}\,.$$

2 (5 val.) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

3 (8 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2(1+x)}\right) & , x > 0 \\ \\ x + k & , x < 0\,. \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.