Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 4/Dez/2002 – LERCI Turma 02 Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n+n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+2}{n+3}\right)\,,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (8 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , x > 1 \\ 1 - x^2 & , x < 1\,. \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)\,.$$

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.