Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 4/Dez/2002 – LESIM Turma 02 Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{2n^2+1}\,.$$

2 (5 val.) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

3 (8 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} & , x > 0 \\[2ex] k(x+1)^2 & , x < 0\,. \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.