Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

2º TESTE – 5/Dez/2002 – LERCI Turma 03 Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n+3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}\,.$$

2 (5 val.) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x=-1$.

3 (8 val.) Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} & ,x>1 \\ \\ k-x^2 & ,x<1\,. \end{cases}$$

onde $k\in\mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

(c) Determine o valor da constante $k\in\mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto um.

(d) Denotando por $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.