Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

05/Dez/2002 – Turma da 2ª fase (LESIM, LERCI, LEGI)   Duração: 1h15

1. (3 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 2 \ \wedge \ x \geq 0\} .$$

(a) Mostre que $S = [0,1[\cup]5,+\infty[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão crescente e convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \notin S$.

2. (6 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ (b) $\dfrac{2^n+(n+1)!}{3^n+n!}$ (c) $\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}$

3. (5 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n+3} ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

4. (3 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

5. (3 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1} .$$

(a) Mostre que (x_n) é estritamente decrescente e que

$$x_n > 2 , \ \forall n \geq 1 .$$

(b) Conclua, com base no resultado da alínea anterior, que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.