Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# $1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

## CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 10/IV/00 – Turmas 01103/4, 03101/2, 12101, 13101 **A** Duração: 50mn

**1** (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{n^2}{n+1} - n$ (b) $\sqrt[n]{2^n + n^2}$ (c) $\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$

**2** (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-2| < 3 \ \wedge \ x \geq 0\} \ .$$

(a) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $S$.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, $u_n \to a$, com $u_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, e $a \notin S$.

**3** (4 val.) Considere a sucessão $(x_n)$ definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} \ .$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 2 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{2x_n + 1} \ , \ \forall n \geq 1 \, .$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que $(x_n)$ é convergente, e calcule o seu limite.

**4** (3 val.) Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão $(y_n)$ de termos em $Y$ convergente para $y$.