Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

1º TESTE – 11/IV/00 – Turma 10106 **A** Duração: 50mn

1 (8 val.) Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

(a) $\dfrac{n^2-1}{n^2-(-1)^n}$ (b) $\dfrac{7^n+10n}{3^{2n}+7^{n+2}}$ (c) $\left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^{n^2}$

2 (5 val.) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, x = \frac{(-1)^n}{n} \, , \; n \in \mathbb{N}_1 \right\} .$$

(a) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em S convergente para o ínfimo de $S \cap \mathbb{R}^+$.

3 (4 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{4x_n} \, .$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 1 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{4x_n + 1} \, , \; \forall n \geq 1 \, .$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

4 (3 val.) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que $\sup A < \inf B$. Prove que A e B são disjuntos.