

**2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I**  
**CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território,**  
**Aeroespacial, Electricidade e Ambiente**

2º TESTE – 29/V/00 – Turmas 01103/4, 03101/2, 12101, 13101 A      Duração: 50mn

**1** (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!},$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

**2** (5 val.) Determine o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2} (x-2)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

**3** (5 val.) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{1+x^2} + k\right) & , x > 0 \\ x & , x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante  $k \in \mathbb{R}$  é que a função  $f$  é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ .

(b) Para  $k = 0$ , mostre que a função  $f$  é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$  e calcule a sua derivada.

**4** (3 val.) Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[0, 1]$  e diferenciável em  $]0, 1[$ . Supondo que  $f(0) = 0$  e  $0 \leq f'(x) \leq 1, \forall x \in ]0, 1[$ , determine todos os valores possíveis para  $f(1)$ .