Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º TESTE – 29/V/00 – Turmas 01103/4, 03101/2, 12101, 13101 **A** Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}\,,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n^2}(x-2)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x}{1+x^2} + k\right) & , x > 0 \\ \\ x & , x \leq 0\,. \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante $k \in \mathbb{R}$ é que a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(b) Para $k = 0$, mostre que a função f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$ e calcule a sua derivada.

4 (3 val.) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $]0,1[$. Supondo que $f(0) = 0$ e $0 \leq f'(x) \leq 1\,,\ \forall x \in]0,1[$, determine todos os valores possíveis para $f(1)$.