

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território,
Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º TESTE – 30/V/00 – Turmas 10105 A Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)},$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x+k)}{x+1} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} & , x < 0 . \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante $k \in \mathbb{R}$ é que a função f é contínua em todo o \mathbb{R} .

(b) Para $k = 0$, determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

4 (3 val.) Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0, +\infty[$ e diferenciável em $]0, +\infty[$. Supondo que $f(0) = 0$ e $f'(x) > 1, \forall x > 0$, mostre que

$$f(x) > x, \forall x > 0 .$$