

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território,
Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º TESTE – 30/V/00 – Turmas 10106 A Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!},$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (x-1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (|x| + k) e^{-\frac{1}{|x|}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 . \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante $k \in \mathbb{R}$ é que a função f é contínua em todo o \mathbb{R} .

(b) Para $k = 0$, mostre que a função f é diferenciável em todo o \mathbb{R} e calcule a sua derivada.

4 (3 val.) Uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *Lipschitziana* se existe uma constante $C > 0$ tal que $|h(x) - h(y)| \leq C|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que se $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável com derivada h' limitada em \mathbb{R} , então h é Lipschitziana.