

**2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I**  
**CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território,**  
**Aeroespacial, Electricidade e Ambiente**

2º TESTE – 31/V/00 – Turmas 03103/4, 07101, 09101, 14105/6, 15101 A Duração: 50mn

- 1 (7 val.) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries numéricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2 + 1}.$$

- 2 (5 val.) Seja  $g$  a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função  $g$  e calcule o seu valor no ponto  $x = -1$ .

- 3 (5 val.) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{k \sin(x)} & , x \geq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & , x < 0. \end{cases}$$

- (a) Determine para que valores da constante  $k \in \mathbb{R}$  é que a função  $f$  é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ .
- (b) Para  $k = 2$ , mostre que a função  $f$  é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$  e calcule a sua derivada.

- 4 (3 val.) Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com dois *pontos fixos* distintos, i.e. existem  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$  e  $h(a) = a$ ,  $h(b) = b$ . Mostre que existe  $c \in \mathbb{R}$  com  $h'(c) = 1$ .