Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 31/V/00 – Turmas 03103/4, 07101, 09101, 14105/6, 15101 **A** Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries numéricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2+1}\,.$$

2 (5 val.) Seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

3 (5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{k\sin(x)} & , \ x \geq 0 \\ \dfrac{1+x}{1-x} & , \ x < 0\,. \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante $k \in \mathbb{R}$ é que a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(b) Para $k = 2$, mostre que a função f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$ e calcule a sua derivada.

4 (3 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com dois *pontos fixos* distintos, i.e. existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $h(a) = a$, $h(b) = b$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ com $h'(c) = 1$.