Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º TESTE – 1/VI/00 – Turmas 11101, 14107/8 **A** Duração: 50mn

1 (7 val.) Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2n}{n!} \ , \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n+1)(n-1)}} \ ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

2 (5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n}{n^2+1} \, (x-1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3 (5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{|k|x}{1+x^2}\right) & , \ x \geq 1 \\ \\ 1-x & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

(a) Determine para que valores da constante $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é que a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(b) Para $k = 2$, determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

4 (3 val.) Seja g uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Suponha que existe $c \in]a, b[$ tal que $g(c) > g(a)$ e $g(c) > g(b)$. Mostre que a equação $g'(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, b[$.