Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura em Engenharia dos Sistemas de Informação e Multimédia

21 de Junho de 2002 Duração: 3 horas

I

(6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $x^2 \log(x+1)$, $x \in]-1, +\infty[$.

(c) $\dfrac{1}{\cos(x)(1-\sin(x))}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{1+x^2} \ , \ y = 1-x \ \text{ e } \ x = 1 \ .$$

II

(6 val.)

Seja g a função definida por:

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2 + 1}} \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D e as linhas de nível da função g. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇g no ponto $(1,1)$.

(c) Determine o contradomínio de g. Trata-se de uma função limitada?

(d) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$h(1) = h'(1) = 1 \ .$$

Calcule o polinómio de Taylor de primeiro grau de $h \circ g$ no ponto $(1,1)$.

III

(4,5 val.)

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3\cos(xy)}{x^2+y^2} & , \text{ se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \text{ se } \ (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ com $v = (1,-1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

IV

(3,5 val.)

1. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+2y^2)(9+x+y) \ .$$

Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou pontos de sela.

2. Desenvolva a função

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} \log(1+t^2)\, dt$$

em série de potências de x. Qual o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função? A função φ tem um extremo no ponto 0? Justifique com base na série que obteve para φ.