Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura em Engenharia dos Sistemas de Informação e Multimédia

10 de Julho de 2002 Duração: 3 horas

I

(6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, +\infty[$; (b) $\log(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$; (c) $\dfrac{\sin(2x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{6+x}{(4-x^2)(x+2)} \ .$$

II

(6 val.)

1. Seja g a função definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1-xy}}{x+y} \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função f. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Identifique na figura anterior (ou num duplicado da mesma) os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \equiv$ curva de nível zero de g;
- $D_+ = \{(x, y) \in D : f(x, y) > 0\}$;
- $D_- = \{(x, y) \in D : f(x, y) < 0\}$;

Qual é o contradomínio da função f? Justifique.

(c) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇f no ponto $(1, 0)$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (e^x(x+y), 1 + \sin(xy))$$

e $h \equiv h(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$h(1,1) = 2\ , \quad \frac{\partial h}{\partial u}(1,1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = -1\,.$$

Calcule o polinómio de Taylor de primeiro grau de $h \circ g$ no ponto $(0,1)$.

III
(4,5 val.)

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , \text{ se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \text{ se } \ (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para qualquer vector $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$, calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$.

(c) A função f é diferenciável no ponto $(0,0)$?

IV
(3,5 val.)

1. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \int_x^{x-y} t\arctan(1+t)\,dt\ .$$

Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou pontos de sela.

2. Desenvolva a função $\dfrac{1}{x^2}$ em série de potências de $(x-2)$. Qual o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função?