Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II
CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

26 de Junho de 1998 Duração: 3 horas

I
(6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$, $x \in]3,+\infty[$.

(b) $\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1,1[$.

(c) $x \arcsin x$, $x \in]-1,1[$.

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = xe^{x^2} \ , \ y = -x \ \text{ e } \ x = 1 \ .$$

II
(6 val.)

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(d) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $h(0,0) = (0,0)$. Calcule o vector $\nabla(f \circ h)$ no ponto $(0,0)$.

III
(5 val.)

1. Seja g a função definida por:

$$g(x,y) = \int_x^{x+y} \frac{\arcsin(t)}{t+1}\, dt \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função g. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Determine o vector ∇g no ponto $(x, y) \in D$.

(c) Verifique que a função g tem um único ponto de estacionaridade no seu domínio D. Trata-se de um ponto de extremo ? Justifique.

2. Desenvolva a função $\log(x^2 + 2x + 2)$ em série de potências de $(x + 1)$. Qual o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

IV
(3 val.)

(a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que se f é integrável em $[a, c]$ para todo o $c \in [a, b[$ então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b} \int_a^c f \ .$$

(b) Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \ x = \frac{1}{n} \ \text{ para algum } \ n \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & , \text{ se } \ x \neq \frac{1}{n} \ \text{ para qualquer } \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Justifique que f é integrável em $[0, 1]$ e mostre que

$$\int_0^1 f = 0 \ .$$

<u>Sugestão</u>: Poderá utilizar o resultado da alínea anterior, mesmo que não o tenha demonstrado.