Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

13 de Julho de 1998 Duração: 3 horas

I - (6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1,1[$.

(b) $\sin(x)\, e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\dfrac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$.

2. Determine a área do conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$-2 \leq x \leq 0 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} \ .$$

II - (6 val.)

Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^3\sqrt{1-xy}}{x^2+y^2} \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função f. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Mostre que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua na origem.

(c) Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.

(d) Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ com $v=(1,1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de F no ponto $(0,0)$?

III - (6 val.)

1. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} h(t)\,dt \ .$$

Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y), \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

2. Desenvolva a função $\frac{1}{x}$ em série de potências de $(x-2)$. Qual o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

3. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = 3(1-x^2) + 2x^2(y-x^2) - y^2 \ .$$

(a) Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou pontos de sela.

(b) A função g tem algum extremo absoluto ? Justifique.

IV - (2 val.)

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto não-vazio, limitado e fechado, e $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma função que verifica as condições:

(i) $f(X) \subset X$;

(ii) $\forall\, a, b \in X, \ a \neq b \Rightarrow \|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$.

(a) Prove que a função real $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \|x - f(x)\|$ é contínua.

(b) Mostre que f tem um e um só ponto fixo, isto é, existe um e um só $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Sugestão: para provar existência do ponto fixo, justifique que a função φ da alínea a) tem mínimo em X e mostre que esse mínimo tem de ser zero.