Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Civil, Território, Matemática e Física

$1^{\underline{o}}$ Semestre 1999/2000

4 de Fevereiro de 2000, 13.00 — Duração: 3 horas

I
(6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $x \in]0, +\infty[$.

(b) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, $x \in]-1, +\infty[$.

(c) $\dfrac{\sin(2x)}{(1-\sin x)\cos^2 x}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Considere o conjunto C dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1 - x^{3/2} \, .$$

Determine a área A do conjunto C e o comprimento L da sua fronteira.

II - (6 val.)

Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \frac{x|y|\sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 + y^2} \, .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função f. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Mostre que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in D \\ \\ 0 & , (x, y) \notin D \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(c) Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ com $\vec{v} = (2, 1)$.

(d) A função F é diferenciável no ponto $(0, 0)$?

III

(5 val.)

1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = (x-y)(x+y-2) + (x-1)^2(y-1)\ .$$

Determine os pontos de estacionaridade de f e classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou de sela.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(x,y) = (1 + x^2 - 2y, 1 - xy)$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz Jacobiana no ponto $(0,0)$ dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz Jacobiana de $h \circ g$ no ponto $(1,1)$.

3. Desenvolva a função $\int_0^x \sin(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

IV

(3 val.)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ com $f(0) = 0$.

(a) Mostre que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que $g(0) = f'(0)$ e $f(x) = xg(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Sugestão: observe, justificando, que $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(tx)]\, dt$.

(b) Mostre que se $f'(0) = 0$ então existe uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que $h(0) = f''(0)$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^2 h(x)$.