Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

2º TESTE – 21/Maio/2003 – versão **2** Duração: 50mn

1 – (11 valores) Seja g a função definida por $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

(a) Determine o domínio D da função g. D é aberto ? fechado ? limitado ?

(b) Represente graficamente no plano os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\} \equiv$ curva de nível zero de g;
- $D_+ = \{(x,y) \in D : g(x,y) > 0\}$;
- $D_- = \{(x,y) \in D : g(x,y) < 0\}$;

(c) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇g no ponto $(1,0)$.

(d) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$h(u,v) = (e^{u+v}, u^2 - v) \ .$$

Calcule o vector $\nabla(g \circ h)$ no ponto $(0,0)$.

2 – (9 valores) Seja f a função real, contínua em $\mathbb{R}^2$, que verifica a condição

$$f(x,y) = \frac{|x+y| \sin(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

em cada ponto $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Indique, justificando, o valor $f(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.