Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

1º TESTE – 30/III/98 – Turmas 03103,03108 A   Duração: 50mn

1 – (10 valores) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1,1[$.

(b) $\sqrt{x}\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}})$, $x \in]0,+\infty[$.

(c) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

2 – (3 valores) Determine a área do conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$1 \leq x \leq e \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1+\log^2(x))} \ .$$

3 – (4 valores) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sin(f(x)) = \int_0^{x^2} \cos(f(\sqrt{t}))\sin(t)\ dt \ .$$

4 – (3 valores) Seja V o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Dada uma função $f \in V$ considere a transformação linear $T_f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx \ , \ g \in V \ .$$

Mostre que T_f é identicamente nula se e só se f o for.