Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

1º TESTE – 31/III/98 – Turmas 10101,10103 A   Duração: 50mn

1 – (10 valores) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $x\cos(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{x^2-x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(c) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x \in]0,+\infty[$.

2 – (3 valores) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = xe^{x-1} \ , \ y = 1 \ \text{ e } \ x = 0 \ .$$

3 – (4 valores) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 t^2 f(t)\ dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + k \ .$$

4 – (3 valores) Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\overline{\int_0^1} h = \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} \ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0,1]$?

<u>Sugestão</u>: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\sup_{[a,b]} h = b \ , \ \text{para todo o intervalo } [a,b] \text{ contido em } [0,1].$$