Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

1º TESTE – 01/IV/98 – Turma 10104 A   Duração: 50mn

1 – (10 valores) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, +\infty[$.

(b) $\dfrac{x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x-3)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

(c) $\dfrac{5\cos x - \cos^3 x}{(4 + \sin^2 x)^2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2 – (3 valores) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log x \ , \ y = 1 - x \ \text{ e } \ y = 1 \ .$$

3 – (4 valores) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\ dt \ ,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4 – (3 valores) Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \ ,$$

onde f é uma função limitada e integrável no intervalo $[a, b]$. Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \le K|x - y| \ , \ \forall x, y \in [a, b] \ .$$