Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II
CURSOS: Informática, Mecânica, Eng.ª Química e Eng.ª Biológica

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 03/IV/98 – Turmas 05101/2/3,17101/2,10104 A   Duração: 50mn

1 – (10 valores) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\sin(x)\cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{1+x}{1-x^4}$, $x \in]-1,1[$.

(c) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $x \in]0,+\infty[$.

Sugestão:recorra à substituição $t^2 = \dfrac{x}{x+2}$.

2 – (3 valores) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log(1+x) \ , \ y = -\log(1+x) \ \text{ e } \ x = e-1 \ .$$

3 – (4 valores) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é par (i.e. $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ dt = 2\int_0^x f(t)\ dt, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4 – (3 valores) Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-1,1]$, contínua em $[-1,1]\setminus\{0\}$ e com limites laterais finitos em $x=0$:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\ .$$

Mostre que a função $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt$$

é diferenciável em $x=0$ e que $\varphi'(0) = f(0^-) + f(0^+)$.

Sugestão: para calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}$ deverá usar primeiro a regra de Cauchy e analisar em seguida os casos $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ separadamente.