Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Civil, Território, Matemática e Física

1º Semestre 1999/2000

1º TESTE – 22/X/99 – Turmas 01207/8/9, 07201/2 Duração: 50mn

1 – (10 valores) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$, $x \in]0,+\infty[$.

(b) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.

(c) $\cos x \, \log(1+\sin^2 x)$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2 – (3 valores) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^x, \; y = e^{-x} \;\; \text{e} \;\; x = 2 \; .$$

3 – (4 valores) Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt \; .$$

Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\, dx = F(1) + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} \; .$$

4 – (3 valores) Usando o facto de

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt \;\; \text{e} \;\; \lim_{x\to\infty} \log(x) = +\infty \; ,$$

mostre que a série harmónica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente.

<u>Sugestão</u>: Usando uma decomposição adequada do intervalo $[1, n+1]$ mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} \, dt = \log(n+1) \; .$$