Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Civil, Território, Matemática e Física

$1^{\underline{o}}$ Semestre 1999/2000

$1^{\underline{o}}$ TESTE – 02/XII/99 – Turmas 01204/5/6 Duração: 50mn

1 – (11 valores) Seja g a função definida por $g(x,y) = \log|x^2 - y^2|$.

(a) Determine o domínio D da função g. D é aberto ? fechado ? limitado ?

(b) Represente graficamente no plano os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\} \equiv$ curva de nível zero de g;
- $D_+ = \{(x,y) \in D : g(x,y) > 0\}$;
- $D_- = \{(x,y) \in D : g(x,y) < 0\}$;

(c) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇g no ponto $(1,0)$.

(d) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$h(u,v) = (2u - v^2, u^2 - v) \ .$$

Calcule o vector $\nabla(g \circ h)$ no ponto $(1,1)$.

2 – (9 valores) Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x+y)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ com $v = (1,1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?