

**Semana 1. Funções elementares.**

1.1 Escreva os seguintes números complexos sob a forma  $a + bi$ :

a)  $(5 + i6) + (2 - 3i)$ .

b)  $(5 + i6)(2 - 3i)$ .

c)  $(2 + i3)^3$ .

d)  $(2 - i3)^{-1}$ .

e)  $\frac{3 + 4i}{2 + i3}$ .

1.2 Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar  $z = \rho e^{i\theta}$ :

a)  $\sqrt{2}$ .

b)  $-2$ .

c)  $1 + i\sqrt{3}$ .

d)  $(1 + i\sqrt{3})^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

1.3 Mostre que

a)  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ .

b)  $|w + z| \leq |w| + |z|$ .

c)  $||w| - |z|| \leq |w + z|$ .

1.4 Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z + \pi| = \sqrt{2}\}$ .

b)  $\{z \in \mathbb{C} : z = 2i + 3e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$ .

c)  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| \leq \sqrt{5}\}$ .

d)  $\{z \in \mathbb{C} : z = i + (2 - i)t, \quad t \in \mathbb{R}\}$ .

e)  $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| \leq |z - i|\}$ . (R: Interior da circunferência de centro em  $z = -\frac{i}{3}$  e raio  $\frac{2}{3}$ ).

1.5 Calcule todas as soluções das equações

a)  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

b)  $(1 + z)^3 = 1$ .

c)  $e^z = -1$ .

d)  $|e^{i\theta} - 1| = 2$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (interprete geometricamente).

e)  $\cos z = 2$ .

1.6 Utilizando as fórmulas de Euler, determine expressões para  $\cos(3\phi)$  e  $\sin(3\phi)$  em termos de  $\cos(\phi)$  e  $\sin(\phi)$ .

1.7 Estabeleça as seguintes identidades (usando a relação entre  $\operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{cos} z$  e  $e^z$  dada pela fórmula de Euler:  $e^z = \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z$ )

a)  $\operatorname{cos}(iz) = \operatorname{cosh}(z)$ .

b)  $\operatorname{cos}^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ .

c)  $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{cos} w + \operatorname{cos} z \cdot \operatorname{sen} w$ .

1.8 Calcule o valor principal (i.e., tomando  $\log z = \log |z| + i\theta$  com  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ ) de:

a)  $\log(-1)$ .

b)  $i^i$ .

c)  $(1 + i)^{1-i}$ .

1.9 Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$

**Sugestão:** Use as fórmulas de Euler na relação  $\tan w = z$  para determinar  $e^w$  em função de  $z$ .

<b>Semana 2. Diferenciabilidade.</b>
--------------------------------------

2.1 Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto de pontos do plano complexo onde são contínuas:

a)  $z|z|$ .

b)  $\frac{1}{2z + 3i}$

c)  $\frac{1}{\cos z}$ .

2.2 Mostre que as funções de variável complexa definidas por  $f(x + iy) = x - 2y + i(2x + y)$  e  $g(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy$ , são diferenciáveis no sentido complexo em todo o  $\mathbb{C}$ , e escreva-as como função da variável complexa  $z$ .

2.3 Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde possuem derivada:

a)  $ze^{\bar{z}}$ .

b)  $\bar{z}(|z|^2 - 2)$ .

c)  $\frac{z + 2}{z + i}$ .

d)  $\frac{1}{z} - \bar{z}$ .

2.4 Mostre que  $u = x^2 + xy - y^2$  é uma função harmónica em  $\mathbb{R}^2$ . Poderá existir uma função diferenciável em  $\mathbb{C}$  cuja parte real seja  $u(x, y) = e^{-y}x + e^xy$ ?

2.5 Determine a função harmónica conjugada  $v$ , com  $v(0, 1) = 0$ , para as seguintes funções  $u$ :

a)  $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$ .

b)  $u(x, y) = \operatorname{Re}(z^3)$ ,  $z = x + iy$ .

c)  $u(x, y) = e^{-y}\cos x$

d)  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

2.6 Seja  $f$  uma função diferenciável num aberto conexo  $D$ , que verifique  $f'(z) = 0$  para todo o  $z \in D$ . Mostre que  $f$  é constante em  $D$  (sugestão: mostre que tanto a parte real como a parte imaginária de  $f$  são constantes enquanto funções das variáveis  $x, y$ ).

2.7 Mostre que  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que  $f$  não possui derivada nesse ponto.

2.8 Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = 2\log \frac{\rho}{2} + i2\theta,$$

com  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$  e  $0 < \theta < 2\pi$ . Calcule  $h'(z)$ .

**Semana 3. Integração no plano complexo.**

3.1 Calcule, para as curvas  $\Gamma$  e funções  $f$  indicadas, os integrais  $\int_{\Gamma} f(z)dz$ :

- a)  $f(z) = e^z$ ,  $\Gamma$  é o segmento de recta entre  $z = i$  e  $z = 1$ , com esta orientação .
- b)  $f(z) = e^z$ ,  $\Gamma$  é constituído pelos segmentos dos eixos coordenados entre os pontos anteriores com a mesma orientação .
- c)  $f(z) = \frac{\bar{z} - 1}{z}$ ,  $\Gamma$  é o caminho dado por  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , percorrido no sentido directo (anti-horário).

3.2 Justifique que a função  $f(z) = \operatorname{sen} z e^{\cos z}$  é diferenciável e calcule os integrais  $\int_{\Gamma} f(z)dz$  para as curvas  $\Gamma$  indicadas no exercício anterior.

3.3 Calcule os seguintes integrais (as curvas supõem-se percorridas no sentido directo):

- a)  $\oint_{\Gamma} e^{\cos^2 z} dz$ , onde  $\Gamma$  é a curva  $|z| = 1$ .
- b)  $\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z + \pi/2} dz$ , onde  $\Gamma$  é a curva  $|z| = \pi$ .

3.4 Calcule os seguintes integrais (as curvas supõem-se percorridas no sentido directo):

- a)  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z - i)^{10}} dz$ .
- b)  $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z - i)} dz$ , onde  $\Gamma$  é a elipse  $3x^2 + 2y^2 = 1$ .

3.5 Seja  $f(z) = \frac{z \cos z}{z^2 + a^2}$ . Determine todos os valores possíveis do integral  $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ , onde  $\Gamma$  é uma curva de Jordan seccionalmente regular contida no domínio de  $f$  e  $a \in \mathbb{R}$ . (Deve incluir ambos os sentidos de percurso de  $\Gamma$ .)

- 3.6 a) Mostre que se existem  $M > 0$  e um inteiro  $n$  tal que  $|f(z)| \leq M|z|^n$  para  $|z| > |z_0|$ , então  $f$  é um polinómio de grau  $\leq n$ .
- b) Seja  $f$  uma função inteira e limitada. Mostre que então  $f$  é constante. (Sugestão: Use a alínea a) no caso em que  $n = 0$ )

**Semana 4. Séries.**

4.1 Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \sqrt{2}i)^n}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{(n!)^2}$ .

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  ;

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$ .

e)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  onde  $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar.} \end{cases}$

4.2 Para que valores de  $z$  é a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$  convergente?

4.3 Integre a série de MacLaurin de  $f(s) = 1/(1 + s^2)$  sobre uma curva interior ao círculo de convergência, desde  $s = 0$  até  $s = z$ , de modo a obter a representação <sup>1</sup>

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \quad (|z| < 1).$$

Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\arctan z}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é analítica no domínio  $|z| < 1$ .

4.4 Considere a função  $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$ . Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de  $f$  em série de potências de  $z - 2$ .

4.5 Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  da função

$$g(z) = (z - z^3) e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left( \frac{1}{z-4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$  percorrida no sentido positivo.

---

<sup>1</sup>Considere um ramo tal que  $\arctan 0 = 0$ .

4.6 Determine a série de Laurent de  $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$  nas seguintes regiões:

a)  $0 < |z - 1| < 2$ .

b)  $|z - 1| > 2$ .

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

a)  $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$ ; b)  $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$ .

4.7 Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  tem raio de convergência  $R$ , determine os raios de convergências de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ e de } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n.$$

**Semanas 5. Teorema dos resíduos.**

5.1 Classifique as singularidades das seguintes funções e determine os respectivos resíduos:

a)  $\frac{1}{(z^2 + 2)^2}$

b)  $\frac{z^2 + 1}{1 - z^4}$

c)  $\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$

d)  $z^4 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$

e)  $\frac{z - \pi/2}{\cos z}$

f)  $\frac{1}{e^z - 2i}$

5.2 Utilize o Teorema dos resíduos para calcular

a)  $\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz .$

b)  $\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)} dz .$

c)  $\oint_{|z|=4} \frac{1}{\operatorname{sen} z} dz .$

5.3 Seja  $f$  uma função analítica no ponto  $z_0$ . Mostre que a função  $g(z) = f(z)/(z - z_0)$  possui em  $z_0$  uma singularidade removível caso  $f(z_0) = 0$ , e um pólo simples de resíduo  $f'(z_0)$  caso contrário.

5.4 Suponha que  $f(z) = h(z)/g(z)$  tem um pólo de ordem 1 em  $z = z_0$ , sendo  $h$  e  $g$  analíticas em  $z_0$  e  $h(z_0) \neq 0$ . Mostre que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0)/g'(z_0).$$

5.5 Seja  $f(z) = \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cos(z) - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ , e  $D(f)$  o seu domínio de definição.

(a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função  $z \operatorname{sen}(z)$  em potências de  $z - 2\pi$ .

(b) Determine o interior da região de convergência da série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ .

(c) Classifique, justificando, as singularidades de  $f$  e determine os respectivos resíduos.

- (d) Calcule os valores possíveis de  $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ , onde  $\Gamma$  é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : -3\pi < \operatorname{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f)$$

e tal que os pontos  $\pm 2\pi$  estão contidos na região delimitada por  $\Gamma$ .

5.6 Estabeleça, através do Teorema dos resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a) 
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2} + \cos(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2} + 1}.$$

b) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5.7 Estabeleça, através do Teorema dos resíduos:

c) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

d) 
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{12}\pi.$$

5.8 Utilize o Teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4 + 1}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  percorrida no sentido positivo.

Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

5.9 Estabeleça, através do Teorema dos resíduos:

e) 
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2e}.$$

f) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}. \text{ (Sugestão: mostre que } e^{-R \operatorname{sen} t} \leq e^{-\frac{2Rt}{\pi}}, \text{ para todo } t \in ]0, \pi[)$$